УДК 517.9

ЗВЕДЕННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ З ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТУ ДО СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

І.Г. КЛЮЧНИК

Одержані умови, при яких розв'язками сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з лінійним відхиленням аргументу є розв'язки сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь.

The obtained conditions under witch solution of the singularly perturbed system of differential equations the linear deviation of the argument is the singularly perturbed solution of differential equations.

Для систем диференціальних рівнянь з лінійним відхиленням аргументу одержані в [1] умови при яких розв'язками розглядуваних систем є розв'язки систем диференціальних рівнянь. Метод [1] запропоновано в [2, 3] до сингулярно збуреної системи і системи з малим параметром при частині похідних з лінійним відхиленням аргументу при наявності точки звороту.

В даній статті шукаються умови при яких розв'язками довільної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з лінійним відхиленням аргументу є розв'язки сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь.

Зведення до системи диференціальних рівнянь. Розглянемо систему диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу вигляду

$$\varepsilon\frac{dy}{dx}+(A_0(x)+\varepsilon A_1(x))y(x,\varepsilon)+(B_0(x)+\varepsilon B_1(x))y(x(1-\varepsilon^2\Delta),\varepsilon)\,, \qquad (1)$$

де $y\in R^2; A_0(x), A_1(x), B_0(x), B_1(x)-$ голоморфні $(2\times 2)-$матриці за дійсно змінною x при $|x|\le x_0$; $\varepsilon-$малий дійсний параметр; $\Delta-$дійсна додатна стала.

Теорема. Нехай матриці $A_i(x), B_i(x), i = 0,1$, голоморфні в області $|x| \le x_0, x \in R$, виконуються умови 1 – 3 і можна вказати ε_0 таке, що справджуються нерівності

$$\|A_i(x)\|_0 \le \alpha_i, \|B_i(x)\|_0 \le \beta_i, i = 0,1, \tag{2}$$

$$\varepsilon_0(\beta_0 + \varepsilon_0\beta_1)\Delta x_0 e^{\varepsilon_0(\alpha_0+\varepsilon_0\alpha_1)\Delta x_0+1} < 1. \tag{3}$$

Тоді при $|x| \le x_0, x \in R$, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$ кожен розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = C(x,\varepsilon) y(x,\varepsilon) \tag{4}$$

є розв'язком системи диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу (1). Крім того, знайдеться матриця $C(x,\varepsilon)$ така, що

$$C(x,\varepsilon) = C_0(x) + \varepsilon C_1(x) + \ldots + \varepsilon^k C_k(x) + \varepsilon^{k+1} C_{k+1}(x,\varepsilon). \tag{5}$$

Матриці $C_i(x), C_{k+1}(x,\varepsilon), i = \overline{0,k}$, голоморфні при $|x| \le x_0$ і $C_{k+1}(x,\varepsilon)$ має неперервну похідну за змінною ε при $|x| \le x_0$, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$ і $C_0(x) = A_0(x) + B_0(x)$.

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n C_n(x)$ є рівномірним при $|x| \le x_0$ асимптотичним розвиненням при $\varepsilon \to 0$ і $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$ матриці $C(x,\varepsilon)$ і має місце нерівність

$$\left\| C(x,\varepsilon) - \sum_{n=0}^{k} C_n(x)\varepsilon^n \right\| \le M|\varepsilon|^{k+1}, \ |x| \le x_0, |\varepsilon| \le \varepsilon_0 \tag{6}$$

де $M = \sup\|C_{k+1}(x,\varepsilon)\|$ при $|x| \le x_0$, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$.

Доведення. Загальний розв'язок рівняння (4) при $|x| \le x_0$ і $\varepsilon \ne 0$ визначається за формулою

$$y(x,\varepsilon) = \Omega_0^x\left(\frac{C(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\right) y_0, \tag{7}$$

де y_0 не залежить від змінної x, $\Omega_0^x\left(\frac{C(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\right)$ при $|x| \le x_0$ і $\varepsilon \ne 0$ є матрицантом системи диференціальних рівнянь (4), де матриця $C(x,\varepsilon)$ визначена при $|x| \le x_0$ і $\varepsilon \ne 0$. Функція (7) буде задовольняти рівняння (1) при $|x| \le x_0$ і $\varepsilon \ne 0$, якщо

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = C(x,\varepsilon)\Omega_0^x\left(\frac{C(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\right) y_0 = (A_0(x) + \varepsilon A_1(x))\Omega_0^x\left(\frac{C(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\right) y_0 +$$

$$+ (B_0(x) + \varepsilon B_1(x))\Omega_0^{x-\varepsilon^2\Delta x}\left(\frac{C(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\right) y_0 \tag{8}$$

З (8) при $|x| \le x_0$ і $\varepsilon \ne 0$ отримаємо рівність

$$C(x,\varepsilon)\Omega_0^x\left(\frac{C(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\right) = (A_0(x) + \varepsilon A_1(x))\Omega_0^x\left(\frac{C(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\right) +$$

$$+(B_0(x)+\varepsilon B_1(x))\Omega_0^{x-\varepsilon^2\Delta x}\left(\frac{C(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\right)y_0 \qquad (9)$$

З властивості матриці $\Omega_0^x\left(\frac{C(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\right)$ випливає, що рівність (9) при $|x|\le x_0$ і $\varepsilon\ne 0$ виконується лише тоді, коли

$$C(x,\varepsilon)=A_0(x)+\varepsilon A_1(x)+(B_0(x)+\varepsilon B_1(x))\Omega_0^{x-\varepsilon^2\Delta x}\left(\frac{C(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\right). \qquad (10)$$

Таким чином, якщо всі розв'язки системи рівнянь (4) при $|x|\le x_0$ і $\varepsilon\ne 0$ є розв'язками рівняння (1), то на вказаній множині матриця $C(x,\varepsilon)$ задовольняє рівняння (10). Очевидно і зворотне твердження.

За допомогою заміни змінних у рівнянні (10) за формулою

$$C(x,\varepsilon)=A_0(x)+\varepsilon A_1(x)+(B_0(x)+\varepsilon B_1(x))Z(x,\varepsilon). \qquad (11)$$

одержимо рівняння

$$Z(x,\varepsilon)=\Omega_x^{x-\varepsilon^2\Delta x}\left(\frac{A_0(x)+\varepsilon A_1(x)+(B_0(x)+\varepsilon B_1(x))Z(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\right). \qquad (12)$$

Визначимо оператор

$$SZ(x,\varepsilon)=\Omega_x^{x-\varepsilon^2\Delta x}\left(\frac{A_0(x)+\varepsilon A_1(x)+(B_0(x)+\varepsilon B_1(x))Z(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\right)$$

у просторі $C(m,J_0)$ матриць $Z(x,\varepsilon)$, заданих і неперервних за двома змінними x і ε на множині $J_0=\{(x,\varepsilon)\,\|\,x|\le x_0,\delta\le|\varepsilon|\le\varepsilon_0\}$ і таких, що $\|Z\|_0=\sup\limits_{(x,\varepsilon)\in J_0}\|Z(x,\varepsilon)\|\le m$, де δ – додатне число таке, що $\delta<\varepsilon_0$.

Матриця $SZ(x,\varepsilon)$ неперервна на множині J_0. Згідно з нерівностями (2), (3) правильною є оцінка

$$\|SZ\|_0\le\sup_{(x,\varepsilon)\in J_0}\left|\Omega_x^{x-\varepsilon^2\Delta x}\left(\frac{\|A_0(x)+\varepsilon A_1(x)\|+\|(B_0(x)+\varepsilon B_1(x))\|m}{|\varepsilon|}\right)\right|\le e^{\varepsilon_0(\alpha_0+\varepsilon_0\alpha_1+(\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)m)\Delta x_0},$$

тобто якщо виконується нерівність

$$e^{\varepsilon_0(\alpha_0+\varepsilon_0\alpha_1+(\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)m)\Delta x_0}\le m, \qquad (13)$$

то оператор S переводить простір $C(m,J_0)$ в себе.

При $(x,\varepsilon)\in J_0$ одержуємо

$$\|SZ_1(x,\varepsilon)-SZ_2(x,\varepsilon)\|\le(\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)\Delta x\varepsilon_0 e^{(\alpha_0+\varepsilon_0\alpha_1+(\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)m)\Delta x_0\varepsilon_0}\|Z_1-Z_2\|_0.$$

При виконанні нерівності

$$(\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)\Delta x\varepsilon_0 e^{(\alpha_0+\varepsilon_0\alpha_1+(\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)m)\Delta x_0\varepsilon_0}<1, \qquad (14)$$

оператор S є оператором стиску в просторі $C(m,J_0)$.

Для $m_1 \le m < \dfrac{1}{\Delta x_0(\beta_0 + \varepsilon_0\beta_1)\varepsilon_0}$ будуть виконуватись одночасно нерівності (13), (14), де m_1 – розв'язок рівняння $e^{\varepsilon_0(\alpha_0+\varepsilon_0\alpha_1+(\beta_0+\varepsilon_0\beta_1)m)\Delta x_0} = m$.

Внаслідок довільності числа δ рівняння (10) має єдиний неперервний розв'язок для $|x| \le x_0$ і $\varepsilon \ne 0$. Довизначимо матриці $Z(x,\varepsilon), C(x,\varepsilon)$, при $|x| \le x_0$ в точці $\varepsilon = 0$ до неперервної за змінними x і ε на множині $J = \{(x,\varepsilon) \| x| \le x_0, |\varepsilon| \le \varepsilon_0\}$, поклавши $Z(x,0) = I$ і $C(x,0) = C_0(x)$.

Тоді, врахувавши довизначеність $Z(x,\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ і рівність (12), одержимо, що на множині J виконується рівність

$$Z(x,\varepsilon) = \Omega_0^x(-\Delta\varepsilon(A_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau) + \varepsilon A_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau) + (B_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau) + \varepsilon B_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau))Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau,\varepsilon))). \quad (15)$$

За допомогою (11), (15) можна довести існування неперервної похідної $C'_\varepsilon(x,\varepsilon)$ за змінною ε матриці $C(x,\varepsilon)$ і можливість зображення при $(x,\varepsilon) \in I$ матриці $C(x,\varepsilon)$ у вигляді $C(x,\varepsilon) = C_0(x) + \varepsilon C_1(x,\varepsilon)$, де матриця $C_1(\varepsilon)$ задається рівністю $C_1(x,\varepsilon) = \int_0^1 C'_\varepsilon(x,\theta\varepsilon)d\theta$.

Оскільки матриця $C(x,\varepsilon)$ довизначена при $\varepsilon = 0$ і праві частини рівнянь (1) і (4) збігаються при $\varepsilon = 0$, то всі розв’язки рівняння (4) при $(x,\varepsilon) \in I$ є розв’язком рівняння (1) при $(x,\varepsilon) \in I$. Згідно [1, 4] матриці $Z(x,\varepsilon)$, $C(x,\varepsilon)$ є голоморфними за змінною x при $(x,\varepsilon) \in I$.

Аналогічно можна показати існування неперервної за змінною ε матриці $Z_1(x,\varepsilon)$ на множині J вигляду $Z_1(x,\varepsilon) = \int_0^1 Z'_\varepsilon(x,\theta\varepsilon)d\theta$ такої, що справджується рівність $Z(x,\varepsilon) = I + \varepsilon Z_1(x,\varepsilon)$. А також з того, що $Z_1(x,\varepsilon)$ задовольняє рівняння

$$Z_1(x,\varepsilon) = -\Delta\int_0^x M(\tau,\varepsilon,Z_1)\Omega_0^\tau(-\Delta\varepsilon M(\tau,\varepsilon,Z_1))d\tau$$

випливає існування частинної похідної $(Z_1(x,\varepsilon))'_\varepsilon$ на множині J. Отже, на множині J матрицю $Z_1(x,\varepsilon)$ можна записати у вигляді $Z_1(x,\varepsilon) = Z_1(x,0) + \varepsilon Z_2(x,\varepsilon)$, в якому $Z_2(x,\varepsilon) = \int_0^1 (Z'_1(x,\theta\varepsilon))'d\theta$, $Z_1(x,0) = -\Delta x(A_0(x) + B_0(x))$. Згідно з математичною індукцією і рівністю (11) одержимо зображення матриці $C(x,\varepsilon)$ у вигляді (5), в якому $C_1(x)$, $C_i(x)$, $C_{k+1}(x,\varepsilon)$, $i = \overline{2,k}$ визначаються за формулами

$$C_1(x) = A_1(x) + B_1(x) + B_0(x)Z_1(x,0),$$
$$C_i(x) = B_0(x)Z_i(x,0) + B_1(x)Z_{i-1}(x,0),$$
$$C_{k+1}(x,\varepsilon) = B_0(x)Z_{k+1}(x,\varepsilon) + B_1(x)Z_k(x,0).$$

З явного вигляду матриць $C_i(x)$, $C_{k+1}(x,\varepsilon)$ випливає, що матриці $C_i(x)$, $C_{k+1}(x,\varepsilon)$, $i=\overline{2,k}$ є голоморфними при $|x|\le x_0$ і матриця $C_{k+1}(x,\varepsilon)$ має неперервну за змінною ε при $(x,\varepsilon)\in J$.

На підставі результатів [1] та обмеженості матриці $C_{k+1}(x,\varepsilon)$ при $(x,\varepsilon)\in J$ з рівності (5) отримаємо нерівність (6). Теорема доведена.

Висновки. Для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з лінійним відхиленням аргументу одержані умови, при яких її розв'язками є розв'язки сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Самойленко А.М. Об одной задаче исследования глобальных решений линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, № 5. – С. 631 – 640.
2. Ключник І.Г., Завізіон Г.В. Про асимптотичне інтегрування сингулярно збуреної системи лінійних рівнянь з відхиленням аргументу //Нелінійні коливання. – 2010. – Т. 13. № 2. – С. 161 – 176.
3. Ключник І.Г., Завізіон Г.В. Лінійна система диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних з відхиленням аргументу і точкою звороту // Укр. матем. вісник. – 2010. - Т.7, № 3.- С. 331-354.
4. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 464 с.